**Лекция 1**

**Физикадағы зерттеу әдістері. Теориялық, эксперименттік және сандық әдістер. Сандық әдістердің дамуына тарихи шолу. Дифференциалдық теңдеулердің классификациясы. Қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Теңдеулердің қасиеттері.**

**Бақылау сұрақтары:**

1. Қарапайым және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер деп қандай теңдеулерді айтамыз?
2. Сызықты дифференциал теңдеу дегеніміз не?
3. ІІ ретті теңдеулер қандай түрлерге жіктеледі?
4. Біртекті дифференциал теңдеу дегеніміз не?
5. Дифференциал теңдеулердің реті қалай анықталады?

Өткен уақыттарда жылуфизикасында, өзге физикалық ғылымдардағыдай, зерттеудің екі әдісі болатын: теориялық және тәжірибелік. Мынадай сұрақ туындайды: осы әдістерге байланысты есептеу әдістері қандай қатынаста болады? Бұл әдістер зерттеудің жаңа жеке түрлері болып табылады деп айтуға болады, алайда, олардың теориялық та, тәжірибелік сипаттары да бар және жоғарыдағы әдістердің орнын баспайды, керісінше толықтырады.

Есептелетін жылуфизика, әрине, таза теориялық ғылым емес (мұндай ғылымдар болғанның өзінде) – ол тәжірибелік салаға жақын.

Дербес туындылы бейсызық теңдеулерді сандық тұрғыдан шешудің қазіргі математикалық теориясы әлі де дәл емес: тұрақтылық қатаң түрде зерттелмейді, қателіктер қатаң түрде бағаланбайды және үйлесімділікті дәлелдеу мүмкін емес. Шешімдердің болуы мен жалғыздығын дәлелдеу барысында кейбір жетістіктерге жеткеніміз рас, бірақ, бұл мәліметтер қызығушылықты қанағаттандыратындай жеке сұрақтарға жауап беруге жеткіліксіз.

Сондықтан есептелетін жылуфизикада ықшамдалған сызықтандырылған есептерді қатаң математикалық зерттеуге, эвристикалық негіздеулерге, физикалық интуицияға, аэродинамикалық құбырлардағы ауаның сорылуына және сынақ процедуралары мен қателіктерге сүйенуге тура келеді.

Қолданбалы математика саласының маманы Био жалпы қолданбалы математика бойынша ескертулер айтқан. Ал бұл ескертулер бүгінгі күні, әсіресе, есептелетін жылуфизикаға сәйкес келеді. Бейтманның айтқан сөзін алға тартып, бұл қолданбалы математикті «математикалық өзіндігі жоқ математика» деп сипаттай отырып, Био қолданбалы математик пен таза математик арасындағы байланысты сөз етеді: «Шығармашылық барысында физика және психология заңдарынан ауытқыма деп әрқашанда есіне салынып отыратын суретшінің сезімін түсінуге болады, алайда, түстік үйлесімділіктер туралы ғылымды оған оқу ауадай қажет». Есептелетін жылуфизиканы енді бастап оқып, үйреніп келе жатқан адамға бұл салада қаншалықты ғылым қажет болса, соншалықты өнердің де керек екендігі туралы алдын-ала ескертіп қойған жөн.

Жылуфизикалық есептерді сандық модельдеу теориялық жылуфизикаға қарағанда тәжірибеге көп жақын. Әрбір жеке есептеуді ЭЕМ-да жүргізу физикалық тәжірибе жасауға өте ұқсас. Мұнда зерттеуші теңдеулерді «қосып», ал содан соң процестің қалай өтетіндігін бақылайды; дәл осылайша экспериментатор да жұмыс жасайды. Есептеу жүргізу барысында жаңа физикалық құбылыстардың ашылуы таңсық емес; мысалы, Кемпбелл мен Мюллер [1968] сандық тәжірибе барысында дыбысқа дейінгі серпілістің бір нұсқасын ашқан және осыдан кейін ғана бұл құбылысты аэродинамикалық құбырларда жасалған тәжірибе кезінде байқаған. Алайда, сандық тәжірибені жүргізетін зерттеушінің белгілі бір мүмкіндіктері бар. Ол тығыздық, тұтқырлық сияқты және т.б. сұйықтың қасиеттерін өз еркінше қалап алады, тіпті, гидродинамикалық шамалардың мәндерін анықтағаннан кейін ағында ауытқулар болмайды. Есептеуші лабораториялық жағдайларда жүзеге аспайтын таза екіөлшемді тәжірибе жүргізе алады. Ол ағын параметрлерін қалауынша таңдай алады, яғни, шекаралық қабаттың бастапқы қалыңдығы мен жылдамдық профилін бірлік ұзындыққа қатысты Рейнольдс және Мах сандарына тәуелсіз түрде таңдай алады, ал бұл жағдай аэродинамикалық құбырларда жасалған тәжірибеде мүмкін болмайды. Ең маңызды жағдай – экспериментатор – есептеушінің теоретик те, экспериментатор – физик те жасай алмайтын мүмкіндігі бар. Ол тұтқырлық коэффициенті тұрақтылығының, Архимед күшін ескермеу, Прандтль санының бірге тең болуы, шекаралық қабат теориясының болжамдары сияқты және т.б. тәуелсіз ықшамдауға арналған физикалық болжамдардың әрқайсысы берілген физикалық құбылысқа жеке дара қалай әсер ететіндігін тексере алады. (Аэродинамикалық құбырда тәжірибе жасау үшін тұтқыр емес, жылу өткізбейтін идеал газ толтырылған темір жол цистернасына тапсырыс жасаған адам жайлы әзіл әңгімені еске салайық). Есептеуші ньютондық емес сұйықтың жаңа моделі жағдайында да негізгі күй теңдеулерінің дұрыстығына көз жеткізе алады.

Дегенмен де сандық тәжірибе ешқашанда және ешқандай мөлшерде де физикалық тәжірибенің де, теориялық талдаудың да орнын баса алмайды. Бұл жағдайдың негізгі бір себебі – тұтас ортаның күй теңдеулерін ешқашанда дәл деп айтуға болмайды, екінші бір себебі – экспериментатор – есептеуші тұтас ортаның қозғалысының дифференциалдық теңдеулерімен жұмыс жасамайтындығында жатыр. Бұл кезде есептелетін дискретті теңдеулер бастапқы дифференциалдық теңдеулерге тордың ұсақталуының шекті жағдайында ғана өтеді, өйткені, мұндай шекке жету мүмкін емес. Теңдеулердің дискреттену процесі көп жағдайда мөлшерлік дәлдікті ғана емес, сонымен қатар шешімдердің сапалық тәртібін де өзгертеді. Зерттеуші тұтқыр емес сұйыққа арналған теңдеулермен жұмыс жасауды көздемек болса да, дискретті аналогтардың бір түрі тұтқырлық эффектілерін қосады. Екінші бір маңызды шектеудің бірі – сандық тәжірибенің турбуленттілікті және өте кіші масштабқа ие болғандықтан шекті-айырымды торда жеткілікті түрде жақын дәлдікпен шешіле алмайтын физикалық құбылыстарды (турбуленттілік, сырғанау сызықтары, құйындар, т.б.) ескере алмайтындығы. Бірақ, осы құбылыстар шындығында ағыстың ірі масштабты қасиеттеріне айтарлықтай әсер етеді. Мұндай құбылысқа мысал ретінде шекаралық қабаттағы турбуленттіліктің ажырау нүктесінің орналасуына әсерін айтуға болады. Екіөлшемді ағыстар деп аталғанымен, тәжірибеде екіөлшемді болмайтын ағыстар да бар: олардың мысалы ретінде ажыраған жазық ағынның қайта қосылу сызығының арғы жағындағы ағысты айтуға болады. Мұндай жағдайларда сандық тәжірибенің нақты екіөлшемділігінің артықшылығы алдамшы болуы мүмкін.

Сандық тәжірибе физикалық тұрғыдан да шектелген, нақтырақ айтқанда, параметрлердің жеке комбинациясы үшін дискретті ақпарат бере алады. Ол өлшемділіктерге талдау жасау арқылы негізгі теңдеулерден алынатын функционалды тәуелділіктерден өзге қатынастарды орната алмайды және сәйкесінше қарапайым теорияның да орнын баса алмайды.

Ендеше, есептелетін жылуфизика тәжірибелік және теориялық жылуфизикадан бөлек, жеке дара пән болып табылады. Оның өзіндік әдістері, өзіндік қиындықтары мен өзінің қолдану аясы бар. Міне, осы сала физикалық процестерді оқып-үйренуде жаңа мүмкіндіктерді аша түспек.

1910 жылы Л. Ричардсон Корольдік қоғамына дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді сандық талдаудың іргетасы болып саналатын елу беттік мақаланы ұсынған болатын. Бұған дейін Шепперд шекті-айырымды операторлар бойынша іргелі жұмыс жасағанымен, Ричардсонның қосқан үлесі алдыңғы зерттеулердің бәрін өз көлеңкесінде қалдырды. Ричардсон Лаплас теңдеулерін, бигармониялық теңдеулерді және өзге де теңдеулерді шешудің итерациялық әдістерін жасады. Ол шекараның белгілі бір бөлігінен бастап шешімді жалғастыруға болатындығына немесе болмайтындығына қатысты стационар есептер арасындағы айырмашылықты тапты, яғни қазіргі терминологиямен айтсақ, гиперболалық және эллипстік есептерді ажырата білді. Ричардсон шекаралық шарттардың, оның ішінде бұрыштық нүктедегі және шексіздіктегі шекаралық шарттардың қойылуын жіті зерттеген. Ол қателіктерді бағалай білді, тор қадамы нөлге ұмтылған жағдайда алынған нәтижелерді экстраполяция-лау әдісін ойлап тапты, сонымен қатар сандық шешімдерді қарапайым пішінді денелердің, мысалы цилиндр үшін дәл шешімдерімен салыстыра отырып тексеруді ұсынды. Ендеше, ол ең алғаш рет ақиқатқа сай сандық әдістерді кең масштабты тас дамбыдағы кернеуді анықтау сияқты тәжірибелік есепке қолдана алды.

Ричардсонның эллипстік теңдеулерге арналған итерациялық әдісінде n-ші итерациясында көрші түйіндердегі (n-1)-ші итерациядағы «ескі» мәндерден тұратын Есептелетін тордың әрбір түйінінде кезегімен шекті-айырымды теңдеу қанағаттандырылады. 1918 жылы Либман үйлесу жылдамдығын есептеліп болған түйіндердегі «жаңа» мәндерді қолдану арқылы едәуір арттыруға болатындығын көрсетті. «Үздіксіз ығысулардың» мұндай схемасында әрбір n-ші итерацияда (n-1)-ші итерациядан алынған ескі мәндердің кейбір саны және көрші түйіндердегі n-ші итерациядан алынған жаңа мәндердің саны қолданылады. Либманның итерациялық әдісінің әрбір циклында Ричардсонның итерациялық әдісінің қос циклындағыдай ең көп деген қателіктер азая түседі (Франкел [1950]).

Бұл теңдеу дербес туындылы теңдеулерді сандық талдаудың ерекшелігін көрсетеді. Әйтсе де, шекті-айырымды аппроксимацияның, итерациялық схемалардың немесе шекаралық шарттардың шамалы өзгерісі үлкен жетістікке әкелуі ықтимал екен. Керісінше, кейбір шындыққа өте жақын және бір қарағанда дәл көрінетін сандық схемалар нәтиже бермеуі мүмкін. Осыған сәйкес мысал ретінде жылуөткізгіштіктің параболалық теңдеуіне арналған Ричардсонның айқын схемасын айтуға болады. Бұл теңдеуде туындыларды кеңістіктік айнымалылар және уақыт бойынша орталық айырымдармен шекті-айырымды аппроксимациялау әдісі қолданылған болатын. О'Брайен өзге авторлармен бірігіп [1950], жоғарыдағы схеманың орнықсыз екендігін дәлелдеді.

ЭЕМ пайда бола қоймаған кезде басты назар эллипстік теңдеулерге түсетін. Филлипс пен Винер [1923] үйлесімділікті ең алғаш қатаң математикалық жолмен дәлелдеп, эллипстік теңдеулерді шешуге бағытталған Либманның итерациялық әдісінің қателігін бағалады. 1928 жылы Куранттың, Фридрихс пен Левидің классикалық еңбектері жарық көрді. Бұл авторлар шекті-айырымды әдістерді негізінен таза математикада зерттеу құралдары ретінде қолдана білді. Дифференциалдық теңдеулерді дискреттеп, дискретті жүйенің дифференциалдық жүйемен үйлесетіндігін, алгебралық тәсілдер арқылы дискретті жүйенің шешімдерінің болатындығын анықтай отырып, эллипстік, гиперболалық және параболалық дифферен-циалдық теңдеулер жүйесі үшін шешімдердің болуы мен жалғыздығы туралы теоремаларды дәлелдеп берді. Мұндай ауқымды жұмыс шекті-айырымды шешімдердің келер жылдардағы қолдану аясын нақтылап берді.

Кеңес Одағының тұсында дербес туындылы теңдеулер үшін шекті-айырымдар әдісі жүйелі түрде 30-жылдары жасала бастады. Осы саладағы ең алғашқы зерттеулерге С.А.Гершгорин [1930], Л.А.Люстерник [1934], Д.Ю.Панов [1932-1933], И.Г.Петровский [1941] және т.б. ғалымдардың еңбектерін жатқызуға болады.

Тұтқыр сұйық гидродинамикасының есептеріне арналған дербес туындылы теңдеулердің алғашқы сандық шешімін 1933 жылы Том берді. 1938 жылы Шортли мен Уэллер шын мәнінде Либман әдісінің күрделірек түрі болатын әдісті ойлап тапты. Олар блоктік релаксацияны, үлгілік функция әдісін, қателіктің релаксациясын, тордың ұсақтануы әдісі мен қателікті экстраполяциялауды ұсынды. Сонымен қатар олар алғашқы болып үйлесімділік жылдамдығын дәл анықтап, зерттеді.

Саусвелл [1946] эллипстік теңдеулерді сандық тұрғыдан шешу үшін релаксация әдісінің анағұрлым тиімдірек нұсқасын жасады. Оның байланыспайтын релаксация әдісінде тордың әрбір түйінінде есептеу жүргізілмейді, тек тор бойынша байланысы жоқ түйіндерді анықтаудың өзі жеткілікті. Осы түйіндерде ғана жаңа мәндер есептелінеді. (Жылуөткізгіштіктің стационар теңдеуі жағдайында байланыссыздық тор ұяшығындағы энергияның жинақталу жылдамдығына тәуелді; сәйкесінше, стационар жағдай байланыссыздықтың барлығы нөлге тең болғанда орнайды). Фокс [1948] жоғарғы және төменгі релаксация схемаларын (мұндай схемаларда байланыссыздықтар дәл нөлге тең деп қабылданбайды) енгізе отырып, Саусвеллдің релаксация әдісінің күрделірек нұсқаларын жасады. Бұл тәсілді релаксация процесі жүретін тор түйіндерін және блоктік релаксация схемасын таңдап алудың әдісі деп атайды.

1955 жылы Аллен мен Саусвелл Саусвеллдің релаксация әдісін цилиндрді тұтқыр сығылмайтын сұйық ағысының орай ағуын есептеуде пайдаланды. Бұл белгілі бір деңгейде Есептелетін гидродинамикадағы алғашқы жұмыстардың бірі болып саналды. Тізбекті тікбұрышты тордағы дөңгелек шекараны көрсету үшін конформды түзілістер қолданылды. Нәтижесінде Рейнольдс санының 1000-ға тең мәндерінде сандық орнықты шешімдер алынды. Бұл орнықтылықтың физикалық шегінен асып түсті. Есептеулер жүргізу барысында авторлар Рейнольдс санының 100 мәнінде орнықсыздықтар басым болатындығын анықтап, оны физикалық тұрғыдан ағынның физикалық орнықсыздығымен байланыстырған. Осылайша олар сандық модельдеу ұғымына жаңалық енгізді. Олардың еңбегі сонымен қатар ғылыми зерттеулерді қаржыландырудың үлгісі бола алды: осы зерттеу жұмыстарын жүргізу үшін Лондондық имперлік колледжге 1945 жылы киім тігумен айналысатын фирмадан үлкен көмек көрсетілген.

Саусвелл әдісін ЭЕМ-да пайдалану оңайға соқпайды. Есептеу жүргізуші адам арифметикалық операциялар жүргізуге қарағанда максимал байланыссыздықты іздеу барысында матрицаны қарап шығуға аз уақыт жұмсаған. ЭЕМ үшін матрицаны қарап шығу жылдамдығы арифметикалық операцияларды жүргізу жылдамдығынан асып кетпейді, сондықтан бұл жерде релаксацияны тізбектей тордың барлық түйіндерінде байланыссыздық нөлге тең болғанға дейін жүргізген анағұрлым тиімдірек. Бұл әдіс Либман әдісіне сәйкес келеді.

Осылайша, ЭЕМ пайдалану Саусвеллдің жоғарғы релаксация идеясын қоса қолдану арқылы Либман әдісі сияқты есептеу тәсілдерінің дамуына ықпал етті. 1950 жылы Франкел (одан тәуелсіз түрде 1954 жылы Янг) жаңа әдісті ойлап тапты. Ол бұл туындысын Либманның экстраполяцияланған әдісі деп атаса, кейіннен ол тізбекті жоғарғы релаксация (Янг [1954]) немесе тиімді жоғарғы релаксация әдісі деп аталатын болды. Франкел бұған қоса эллипстік теңдеулерді итерациялық шешу және параболалық теңдеулерді уақыт бойынша қадам арқылы шешу арасындағы ұқсастықты байқаған. Бұл өз кезегінде маңызды нәтижелер берді.

ЭЕМ дамуына сай параболалық теңдеулерге де аса мән беріле бастады, өйткені, бейстационар шешімдерді ескерудің мүмкіндігі туған болатын. Бірөлшемді бейстационар гидродинамикаға зор үлес қосқан Рихтмайердің алғашқы монографиясында [1957] оннан аса сандық схемалар келтірілген болатын. Көпөлшемді жағдайда бірінші айқын емес схема ретінде 1947 жылы жарық көрген Кранк-Николсон әдісін айтуға болады. Бұл әдіс әрбір уақыттық қабатта итерация жүргізуді талап етті. Мұндай әдіс осы күнге дейін ең танымал әдістердің бірі болып қала береді және кеңінен қолданылып жүрген шекаралық қабат теңдеулерінің автомодельді емес шешімдерінің негізінде жатыр (Блоттнер [1970]).

Ең алғаш рет уақыт бойынша анықтаудың асимптотикалық әдісі идеясы қашан пайда болғандығын дөп басып айту қиын. Бұл әдісте стационар шешімді алу үшін бейстационар ағыс теңдеулерін интегралдау керек. Мұндай идеяның ЭЕМ пайда болмай тұрған кезде қарастырылғандығы сөз жоқ күмән тудырады.

Есептелетін гидродинамика саласындағы ең алғашқы жұмыстардың көпшілігі Лос-Аламос зертханасында жүргізілген болатын. Дәл осы Лос-Аламоста Екінші дүниежүзілік соғыс кезінде фон Нейман параболалық шекті-айырымды теңдеулердің орнықтылық критерийін жасаған болатын және сызықтандырылған жүйені зерттеудің әдісін ұсынған. Оның жұмыстары жөніндегі қысқаша есеп ашық әдебиет беттерінде тек 1950 жылы ғана жарияланды (Чарни және өзге де авторлар; [1950]). Мұндай маңызы зор мақалада алғаш рет құйын үшін бейсызық теңдеулерді зерттеуге бағытталған кең көлемді метеорологиялық есептеулер келтірілген болатын. Авторлар құйын үшін жазылған теңдеулердің орнықтылығы қарапайым физикалық айнымалыларға (жылдамдық пен қысым) арналған дәстүрлі теңдеулерге қарағанда артықшылығы көбірек екендігін анықтаған және бейстационар есептің мағынасының эвристикалық түсін-дірмесін кіріс пен шығыс шекаралардағы математикалық толық емес шарттары бар есеп ретінде берген.

1950 жылы Нейман шекті-айырымды схемаларға орнықтылық ұғымын енгізуді ұсынғанымен, диф-ференциалдық теңдеулердің нақтылығы және олардың орнықтылығы мен аппроксимациясынан үйлесімділіктің туындайтындығы жөніндегі теоремаға сәйкес, орнық-тылықтың мағынасын алғаш рет тек кеңестік математиктер - В.С. Рябеньский [1952] мен А.Ф. Филиппов [1955] ашып берді.

Елуінші жылдардың ортасында Писмен мен Ракфордтың [1955], сонымен қатар Дуглас пен Ракфордтың [1956] еңбектерінде уақыт бойынша үлкен қадамдарда қолдануға болатын параболалық теңдеулерді шешуге арналған тиімді айқын емес әдістер ұсынылды. Тізбекті бағыттар әдісінің айқын емес схемасы атауымен оларды Франкел аналогиясын қолдану арқылы [1950] эллипстік теңдеулерге пайдаланды. Франкел теориясы параболалық теңдеулердегі шешімнің уақыт бойынша өтуі мен эллипстік теңдеулердегі шешімнің итерациялар бойынша өтуінде жүзеге асырылды.

Тізбекті бағыттардың айқын емес схемасы құйынның тасымал теңдеулері қолданылатын сығылмайтын сұйық ағысы туралы есептерде кеңінен пайдаланылады.

1953 жылы Дюфорт пен Франкел параболалық теңдеулерге арналған өздерінің «чехарда» схемасын жариялады, бұл схеманы жоғарыда айтылған схемаға ұқсас қалауымызша алынған уақыт бойынша үлкен қадамдарға (конвективті мүшелер болмаса) пайдаланған тиімді. Бірақ, бұл әдіс таза айқын схемалардың қасиеттерін сақтайды. Бұл схеманы Харлоу мен Фромм [1963] бейстационар құйындық жолдың сандық шешімін анықтауда ұтымды қолдана білді.

Есептердің бір тобы үшін есептеу алгоритмінің біркелкілігі мен біртектілігін талап ету біртекті айырымдық схемалар ұғымына алып келді. Бұл ұғымды А.Н. Тихонов пен А.А. Самарский [1950-1964] түсіндіріп берді. С.К. Годунов [1958] сақталу заңдарын газ динамикасының үзілісті шешімдерінің схемасын шығаруда қолданды. Гидродинамика мен жылуфизикасының есептерін шешуде А.А. Дородницын ұсынған және О.М. Белоцерковский, П. И. Чушкиндар дамытқан интегралдық қатынастар әдісі маңызды рөл атқарады. Бұл тәсілде түзулер әдісінің негізінде дивергентті түрде жазылған теңдеулерге ішінара айырымды аппроксимация жасалынады. Осындай әдістер квазисызықты теңдеулерге арналған айырымды схемалардың құрылымына деген жалпылама көзқарастың қалыптасуына үлкен себеп болды.

Scientific American атты журналдың беттерінде жарияланған Харлоу мен Фроммның мақаласы [1965] Құрама Штаттардың ғылыми қоғамының назарын Есептелетін гидродинамиканың мүмкіндіктеріне аударуға арнайы бағытталған еді. Шамамен осы кездерде La Houille Blanche деп аталатын француз журналында жоғарыдағы мақалаға ұқсас Маканоның мақаласы жарық көрді [1965]. Екі мақалада да ең алғаш рет сандық модельдеу мен сандық тәжірибе ұғымдарына нақты анықтама берілді. Осы мақалалар оқырман назарына ұсынылғаннан кейін Есептелетін жылуфизика жеке пән болып қалыптаса бастады.

Жоғарыда айтылған уақытқа тәуелді шешімдердің барлығының Есептелетін орнықтылығы жоғарыдан Рейнольдс саны бойынша шектелген болатын (негізі бұл шек Рейнольдстің тор санымен, яғни шекті – айырымды тор ұяшығы қадамының өлшемі бойынша табылған сан арқылы анықталады). 1966 жылы Томан мен Шевчик конвективті мүшелерді бейнелеу үшін ағынға қарсы айырымды пайдалану арқылы және шекаралық шарттарға басым көңіл бөле отырып, шектеусіз Есептелетін орнықтылыққа қол жеткізді. Олардың цилиндрді орай ағудағы есептеулері Рейнольдс санының миллионға тең мәндеріне дейін таралды; Есептелетін орнықсыздықтарды болдырмай, цилиндрді «айналдырып», магнустық көтеру күшін ала білді. Олардың схемасы бірінші ретті дәлдікке ие болғанымен, алған нәтижелерінің тәжірибелік мәліметтермен жақсы үйлесімділік табуы дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді айырымдық бейнелеуде пайда болатын аппроксимация қателіктерінің ресми дәлдігінің маңыздылығын асыра бағалауға итермеледі. Осы себепке сай шекаралық шарттардың сандық қойылуының айтарлықтай әсерін анықтаған Ченнің еңбегін [1968] атап айтуға болады.

Эллипстік Пуассон теңдеуін сандық шешуге бағытталған тура (итеративті емес) Фурье әдістері бұрыннан белгілі бола бастаған (мысалы, Вазов пен Форсайттың [1960] монографияларын қараңыз), бірақ, оларды гидродинамика есептеріне сол кезде пайдаланбаған. 1965 жылы Хокни туыстас, бірақ, Пуассон теңдеуі үшін үлкен шекаралық есептерді тиімді шешуге мүмкіндік берген әрі жылдам нәтиже беретін әдісті ойлап тапты. Осы еңбек жарық көргеннен соң Пуассон теңдеуі үшін тура әдістер қарқынды дами түсті.

Жоғарыда айтылған әдістердің барлығы сығылатын сұйықтың дыбысқа дейінгі аймағындағы ағысын есептеуге жарамды. Асқын дыбыстық есептер дыбысқа дейін-гілерден бірнеше маңызды белгілерімен ажыратылады. Оның ішіндегі маңыздысы - асқын дыбыстық ағыста соқпа толқындардың (яғни, шешімдердің үзілуі) пайда болуы.

Гиперболалық теңдеулерді сандық шешуге жазылған іргелі еңбектердің бірі – 1928 жылы жарияланған Курант, Фридрихс пен Левидің мақаласы. Мұнда теңдеулердің сипаттық қасиеттері мен жалпылама сипаттамалар әдісі баяндалған. Сонымен қатар осы жұмыста атақты қажетті Курант-Фридрихс-Леви орнықтылық шарты алынып, түсіндірілген болатын. Бұл шартта сипаттық тормен сәйкес келмейтін Есептелетін торда айырымдық теңдеулердің тәуелділік облысына дифференциалдық теңдеулердің тәуелділік аймағы да кіруі тиіс деп айтылады. Бұл КФЛ орнықтылық шарты (қазіргі заманғы терминологияда Курант саны бірден кем болуы тиіс деп айтылады) Лагранж және Эйлер айнымалыларында жазылған гидродинамика теңдеулері үшін орындалады.

«Бөлшектерді» бақылау негізіндегі Лагранж әдістері жоғарғы деңгейге дейін Лос-Аламос зертханасында жетілдірілген болатын (Фромм [1961]). Жалпы айтқанда, екіөлшемді есептер үшін Эйлер әдістерін пайдаланған дұрыс, алайда, оларды қолдану барысында соқпа толқындарды ескеру қиынға соғады. Егер тор ұяшығының өлшемі соқпа толқынның қалыңдығынан аз болмаса, дәлдікті кемітетін осцилляциялар пайда болады. Бұл осцилляциялар дискретті торда физикалық мағынаға ие болады (Рихтмайер [1957]). Соқпа толқын арқылы өткенде жылдамдықтың жоғалуының әсерінен бөлінетін кинетикалық энергия молекулалардың өзара кездейсоқ соқтығысының ішкі энергиясына айналады; есептеу барысында молекулалардың рөлін шекті-айырымды тордың ұяшықтары атқарады.

Эйлер торындағы соқпа толқындарды есептеудің қарпайым түрі соқпа толқындардан белгілі бір қашықтықта шешімге әсер ете қоймайтын жасанды тұтқырлықты айқын немесе айқын емес жолмен енгізе отырып, секірісті бірнеше ұяшыққа дейін «жойып жіберу» болып табылады. 1950 жылы фон Нейман мен Рихтмайер жасанды тұтқырлық схемасын ұсынды. Мұнда «тұтқырлық коэффициенті» жылдамдық градиентінің квадратына пропорционал болған. Ладфорд, Полячек пен Зегер [1953] Лагранж торындағы тұтқыр сұйық ағысы теңдеулерінде физикалық тұтқырлықтың ең үлкен мәндерін ғана таңдап алған, бірақ, олардың әдісінде тұтқырлықтың айтарлықтай үлкен мәндері қажет болған.

Секірісті жою үшін тұтқырлықты айқын енгізудің орнына шекті-айырымды аппроксимацияларда қолданы-латын айқын емес тұтқырлықты да пайдалана беруге болады. Осы жағдай Лос-Аламоста Эванс, Харлоу мен т.б. жасаған ұяшықтардағы бөлшектер әдісінде (РІС әдісі), сонымен қатар Лакс әдісінде де (Лакс [1954] кеңінен қолданыс тапты.

1954 жылы жарияланған Лакс еңбегінде сандық схеманың өзі пайдаланылған дифференциалдық теңдеу-лердің түрлеріне – консервативті формаға қарағанда маңызды емес. Лакс тәуелді айнымалылары жылдамдық, тығыздық пен температура болатын қарапайым гидро-динамика теңдеулерін түрлендіру арқылы айнымалылары қозғалыс мөлшері, тығыздық пен тежелудің меншікті ішкі энергиясы болатын теңдеулер жүйесін алуға болатын-дығын көрсетіп берді. Теңдеулердің мұндай жаңа жүйесі сақталу заңдарының мағынасын бейнелеп, шекті-айрымды схемада ағыстың интегралдық сипаттамаларын сақтап қалуға мүмкіндік береді. Мұндай теңдеулер жүйесі пайдаланылатын шекті-айырымды схемалардың түріне қарамастан қазіргі кезде соқпа толқындардың таралуын есептеуде кеңінен қолданылып жүр, өйткені, жазық соқпа толқынның жылдамдығы кез келген тұрақты схема арқылы дәл есептеледі (Лонгли [1960] және Гари [1964]).

**Дифференциалдық теңдеулердің жіктелуі**

Есептеуші үшін дифференциалдық теңдеулерді жіктей білу маңызды, өйткені, шешімнің сандық әдісін таңдау осы жағдаймен тығыз байланысты. Дифферен-циалдық теңдеулерді бірнеше белгілері бойынша жіктеуге болады. Олардың ішіндегі маңыздыларына тоқталып өтейік.

***- Қарапайым дифференциалдық теңдеулер және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер***

Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бір *ғана айнымалыға тәуелді болса*, онда мұндай дифференциалдық теңдеу *қарапайым* дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Егер дифференциалдық теңдеудегі белгісіз функция бірнеше айнымалыға *тәуелді болса,* онда мұндай дифференциалдық теңдеу *дербес туындылы* дифференциалдық теңдеу деп аталады.

Мысалдар.

Құбырдағы сұйықтың стационар бірөлшемді ағысы қарапайым дифференциалдық теңдеумен сипатталады:

, (1.1)

өйткені, *u(x)* белгісіз функциясы бір ғана *х* айнымалысына тәуелді.

Құбырдағы сұйықтың стационар екіөлшемді ағысы дербес туындылы дифференциалдық теңдеумен сипатталады:

. (1.2)

Мұндағы *u(x, у)* белгісіз функциясы екі айнымалыға тәуелді: х және у*.*

* ***Реті***

Теңдеудің реті дифференциалдық теңдеудің құрамына кіретін *ең жоғарғы туындының* ретіне тең.

Мысалы, (1) теңдеу – І ретті, ал (2) теңдеу - ІІ ретті. ІІ ретті теңдеуді жалпы жағдайда мынадай түрде көрсетуге болады:

. (1.3)

ІІ ретті теңдеулер келесі түрге жіктеледі:

*а)* егер *В2-4АС=0* болса, онда (1.3) **параболалық теңдеу** болады;

*б)* егер *В2-4АС<0* болса, онда (1.3) **эллипстік теңдеу** болады;

*в)* егер *В2-4АС>0* болса, онда (1.3) **гиперболалық теңдеу** болады.

(1.2) ІІ ретті теңдеуі параболалық теңдеу болып табылады (оны (1.3) түрге келтіріп, *В2-4АС* өрнегінің неге тең болатындығын анықтау арқылы тексеріңіз).

Эллипстік теңдеудің мысалы ретінде *q(x,y)* жылулық көзден температураның стационар таралуын бейнелейтін Пуассон теңдеуін айтуға болады (*q(x,y)>0* болғанда *(x,y)* нүктесінде жылу бөлінеді, ал *q(x,y)<0* болғанда жұтылады):

. (1.4)

Гиперболалық теңдеудің мысалы ретінде тербелістер теңдеуін келтіреміз:

 (1.5)

Теңдеудің түрі екінші ретті туындылардағы коэффициенттермен ғана анықталатындығын және бірінші ретті туындылар мен функцияның өзіне қатысты коэффициенттерге, бос мүшелерге тәуелді болмайтындығын атап айтамыз.

Айнымалы коэффициенттері бар тағы бір теңдеуді қарастырайық:

 (1.6)

Мұндағы *А=x, В=0, C=1,* сәйкесінше, *В2-4АС=-4х.* Бұл мысал айнымалы коэффициенттері бар теңдеудің түрі нүктеден нүктеге дейін өзгеретіндігінің айқын дәлелі: *х<0* болғанда (1.6) теңдеу эллипстік болады, ал *х=0* болғанда (1.6) теңдеу параболалық болса, *х>0* болғанда (1.6) өрнек гиперболалық болады.

***- Сызықтылық***

Сызықты деп құрамындағы *тәуелді айнымалы мен оның барлық туындылары өзара сызықты байланысқан* дифференциалдық теңдеуді айтады, оған қоса олар бір-біріне көбеймейді, дәрежеге шығарылмайды, трансцендентті функцияның аргументі бола алмайды және т.с.с.

Мысалы, (1.4)-(1.6) теңдеулер сызықты болса, (1.1)-(1.2) теңдеулер – бейсызықты (неге екенін түсіндіріңіз). (1.3) теңдеу сызықты деп аталады, егер *A, B, C, D, E, F*  коэффициенттері *f* белгісіз функциясына және оның туындыларына тәуелді болмаса.

Жылуфизикалық құбылыстар мен процестерді сипаттайтын теңдеулердің көпшілігі бейсызықты болады.

***- Біртектілік***

(1.3) дифференциалдық теңдеу ***біртекті*** деп аталады, егер *оның оң жақ бөлігі барлық x және y үшін нөлге тең болса.* Керісінше жағдайда теңдеу ***біртексіз*** деп аталады.

Мысалы, (1.5) теңдеу – біртекті, ал (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) теңдеулері – біртексіз. Егер *G=0* болса, (1.3) теңдеу біртекті деп аталады және *G≠0* болса біртексіз болады.

Әдетте, аналитикалық жолмен қарапайым сызықты дифференциалдық теңдеулерді (оның ішінде де барлығын емес) және дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кейбір арнайы түрлерін ғана шешуге болады. Қалған теңдеулер үшін, әсіресе, нақты есептерді сипаттайтын, тәжірибелік қолданысқа ие теңдеулер мен теңдеулер жүйесі үшін сандық әдістер жалғыз шешім беретін тиімді әдістердің бірі болады.